# الاستلزام الصوري والطبيعي توافق أم تعارض؟

د.طارق المالكي

الرموز المستعملة:

| | |
|---|---|
| ∨ | الفصل المنطقي |
| ∧ | الوصل المنطقي |
| ~ | النفي المنطقي |
| ⊣ | الاستنتاج |
| ⇐ | الاستلزام |
| ← | رمز الفصل بين سابق المتوالية ولاحقها |
| ↔ | التكافؤ |
| Γ،Δ، θ، ψ | أحرف يونانية تدل على مجموعات من الصيغ |
| أ ، ب،ج.. | صيغ منطقية |
| [ أ ] | الصيغة أ بين القوسين تدل على أن أ فرضية |

يقيم بعض الفلاسفة تعارضا بين الاستلزام الصناعي والاستلزام الطبيعي من حيث كون الأول يتعذر تطبيقه على صورنة الجمل الطبيعية ما جعلهم يفكرون في تأسيس استلزام خاص يراعي خصوصية اللسان الطبيعي استلزام لا يتقيد بقوانين المنطق الصوري من قبيل 'عكس الثبوت' و'عكس الانتفاء' . لكن هؤلاء الفلاسفة تعاملوا مع 'المنطق الصوري' على أساس نظرية واحدة لا تعدد فيها والواقع أن الصوريين أنفسهم مختلفون فيما بينهم حول تأويل بعض الروابط المنطقية مثل اختلاف الحدسيين مع التقليديين في قبول بعض المبادئ المشهورة مثل الثالث المرفوع والبرهان بالمثال المضاد...في هذا المقال سنسعى إلى تصحيح بعض الأفكار المتعلقة بالاستلزام وما شابهه من سوء فهم من قبل بعض المشتغلين بالفلسفة .

بداية سنتطرق إلى ما نعنيه بالاستلزام الصناعي وكيف يعرفه الرياضيون والمناطقة؟ وما الفرق بين الاستلزام والاستنتاج المنطقي؟ غالبا ما يختلط الاستلزام الصناعي بمفاهيم محايثة من قبيل مفهوم المتوالية وسنبين باذن الله الفروق بينهما ، وأخيرا سنقف عند بعض الفروقات التي أوردها الأستاذ طه عبد الرحمان في التمييز بين الاستلزام الصناعي والطبيعي.

1.الاستلزام الصناعي:

يتم بناء القضية اللزومية عبر إدراج رابط الاستلزام (⇐) بين قضيتين ، ويترجم إلى اللغة الطبيعية بعبارة (إذا كان ..فإن..) ، يُسمى الجزء الأول من الاستلزام (أ⇐ب) بمقدم الاستلزام أما الجزء الثاني فيدعى بتالي الاستلزام ، لا يتفق المناطقة على رمز واحد للاستلزام مستعملين رموزا مختلفة ونجد المنطقي الواحد يستعمل أكثر من رمز للاستلزام، وعلى العموم فرموز الاستلزام المستعملة لا تخرج عن هذه المجموعة (⇐ ، ←، ⊂ ، ≻) في هذا الدراسة سنقتصر على الرمز ⇐. يختلف تعريف القضية اللزومية من مذهب منطقي إلى آخر ويمكن التمييز بين ثلاثة تعريفات للاستلزام:

يندرج التعريف الأول للاستلزام ضمن ما يُسمى بنظرية النماذج التي يتزعمها العالم البولوني 'تارسكي' ، ويُعرف الاستلزام دلاليا بواسطة مفهوم الصدق وعادة ما يُستعان في تعريف الاستلزام بجدول الصدق (**جدول 1**) ، وهكذا يكون الاستلزام خاطئا إذا كان مقدم الاستلزام صحيحا والتالي كاذبا .

| أ | ب | أ⇐ب |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

جدول 1

يمكن تعريف الاستلزام بواسطة الروابط المنطقية الأخرى حيث يمكن تعريف الاستلزام بالنفي والفصل كما في التكافؤ (**- 1**) أو بواسطة النفي والوصل كما في (**- 2**):

- -1- أ⇐ب ↔ ~أ ∨ ب

- -2- أ⇐ب ↔ ~(أ ∧ ~ب).

لكن بعض هذه التكافؤات غير مشروعة في المنطق الحدسي حيث يرفض الحدسيون على رأسهم 'بروير' و'هايتين' المماثلة (**- 1-**) لأنه لو صحت هذه المماثلة لترتب عنها قبول مبدأ الثالث المرفوع (- 3) ، ومن المعلوم أن هذا المبدأ غير مشروع في استدلالات الحدسيين[1].

- **-3-** أ⇐أ ↔ ~أ ∨ أ

[1] للمزيد من المعلومات عن هذا الموقف أحيل القارئ على van Dalen [2004] و A.S. Troelstra, van Dalen [1988]

ويعود سبب ذلك إلى اختلاف طريقة الحدسيين عن التقليديين في تأويل الروابط المنطقية حيث ينبني تأويل الحدسيين للروابط المنطقية على مفهوم البرهان فالقضية التي لا نملك لها برهانا هي قضية غير مشروعة  بينما في المنطق التقليدي نعرف القضية المنطقية بدلالة الصدق والكذب بغض النظر عن وجودها أو عدمها.

أما التعريف الثاني للاستلزام فيكون عن طريق مفهوم الاشتقاق فإذا تم اشتقاق القضية ب بناء على افتراض القضية أ ، حينها نقول أن القضية المفترضة تستلزم القضية ب[2] .

[ أ ]

⋮

ب

―――――

أ⇐ب

**شكل 1**

في الشكل 1 انطلقنا من فرضية أ ثم اشتققنا ب حيث النقط (...) في الشكل ترمز إلى صيرورة عملية الاشتقاق، القضية ب كانت متعلقة بالقضية أ لكن بعد الاستلزام لم تعد مرتبطة بها، تُسمى هذه العملية بالتفريغ حيث فرغنا الفرضيات في الاستلزام، هكذا قمنا بإدخال الاستلزام ، وسنمثل لذلك بالمثال (شكل 2) مفترضين قضية وصلية ( أ ٨ ب) ، إذا كانت هذه القضية صادقة فيمكن أن نشتق القضية أ منها ، ومن ثم نستنتج أن (أ ٨ ب)⇐أ

[أ ٨ ب]

―――――

أ

―――――

(أ ٨ ب)←أ

**شكل 2**

[2] –هذه الطريقة في معالجة مفهوم الاستلزام نجدها في الاستنتاج الطبيعي لجينتزن Gerhard Gentzen[1969],

أما إذا أردنا إخراج الاستلزام أو التخلص منه فتوجد طريقة موازية تسمح لنا بالتخلص من رابط الاستلزام تُعرف بقاعدة اثبات التالي مقتضى هذه القاعدة أنه إذا أثبتنا أ في الاستلزام أ⇐ب سمح لنا ذلك باشتقاق ب.

فنأخذ ما استخلصناه في الشكل 2 ونطبق عليه اثبات التالي من أجل التخلص من الاستلزام سنحصل على النتيجة الآتية (**شكل 3**):

$$\frac{\text{أ} \wedge \text{ب} \qquad (\text{أ} \wedge \text{ب}) \rightarrow \text{أ}}{\text{أ}}$$

شكل 3

أما التعريف الثالث للاستلزام فقد تطور في إطار ما يُسمى بالمنطق الحواري وقد عُرف الاستلزام في سياق الادعاء والاعتراض[3]. وتُعرف القضية الاستلزامية بكونها القضية التي يُعترض عليها بإثبات مقدم الاستلزام (أ) من قبل المعترض ، أما الرد على هذا الإعتراض فيكون من قبل المدعي بإثبات التالي.

| المدعي | المعترض |
| --- | --- |
| أ→ب | |
| | أ |
| ب | |

فإذا أثبت المعترض مقدم الاستلزام أ فإن المدعي لن يفوز بهذه الجولة حتى يدفع الاعتراض باثبات ب .

1.1.الاستلزام والاستنتاج

يرتبط بالاستلزام مفهوم آخر وأحيانا يصعب التمييز بينهما وهو مفهوم الاستنتاج ويرمز له بمجموعة من الرموز المتكافئة (⫣، ⊣،∴) هذا الرمز يتوسط في الغالب بين مجموعتين من الصيغ ؛ الصيغ الأولى تسمى بمجموعة المقدمات (نرمز لها بـ **Γ**.)، أما المجموعة الثانية فتُدعى مجموعة النواتج (نرمز لها بـ **Δ**)

- 4- Γ ⫣ Δ

3– لا يتسع الموضوع لعرض أسس هذا النوع من المنطق لكن أحيل القارئ على Rahman S., Keiff L. [2005]

تسمى هذه العبارة (- 4) حجة وتكون الحجة صحيحة إذا كانت النواتج تصدق في كل حالة تصدق فيها المقدمات، وسنمثل لذلك بالحجة الآتية:

**- 5-  أ ، أ⇐ب** ⊩ ب

أما طريقة التحقق من كون الحجة صحيحة أم لا فيكون عن طريق إما جداول الصدق أو عن طريق اشتقاقها من نسق برهاني سنفضل الطريقة الأولى التي تبدوا أسهل ؛ إذا عدت إلى الجدول 1 ستلاحظ أن الصيغة ب تصدق في كل حالة تصدق فيها الصيغتان أ وَ أ⇐ب ومن ثم نستنتج ب من هذه المقدمات .

مثال آخر:

- 6-  أ ⊩ أ ∨ ب

تقول هذه الحجة أنه كلما صدقت أ تصدق فيها العبارة أ ∨ ب ، ويمكن التأكد من ذلك بواسطة جدول الصدق (انظر الأسطر 1،2) من الجدول 2 :

| أ | ب | أ∨ب |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |

جدول 2

عندما تكون المقدمات فارغة فإن مجموعة النواتج تكون صحيحة على الدوام وهذه الخاصية تعطي للنواتج وضعية صادق على الدوام أي تحصيلية:

مثال : ⊩ أ ∨ ¬أ

يمكن التحقق من ذلك بواسطة جداول الصدق :

| أ | ¬أ | أ ∨ ¬أ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

انظر كيف صدقت العبارة (أ ∨ ¬أ) مهما كانت قيمة أ ومن ثم فهي صادقة على الدوام.

ما علاقة الاستلزام بالاستنتاج ؟

هناك مبرهنة تربط بينهما ونسمى بمبرهنة الاستنتاج وهي على الشكل الآتي:

إذا كانت أ ⊩ ب فإن ⊩ أ⟸ب حيث تمثل أ مقدمة و ب النتيجة التي بُنيت على الفرضية فإذا كان الأمر كذلك فإن كل صيغة في مجموعة من المقدمات تستلزم كل صيغة في النواتج.

2.1.الاستلزام والمتوالية[4]

يعود مفهوم المتوالية إلى العالم الألماني 'جينتزن' الذي وضع أسس لما يسمى في نظرية البرهان بحساب المتواليات[5] ، وفي سياق حديثه عن قواعد حساب المتواليات جاء بمفهوم حديث وهو مفهوم المتوالية الذي يقوم على ركنين أساسين سوابق ولواحق ويفصل بينهما الرمز ← ، وصورته المنطقية هي

- 7- Γ ← Δ

حيث تمثل Γ وَ Δ مجموعتين من الصيغ ، أما الرمز ← فينتمي إلى اللغة الفوقية ويكمن دوره فقط في الفصل بين سابق المتوالية Γ ولاحقها Δ.

نمثل للمتوالية بما يلي :

- 8- أ ، أ⟸ب ← ب

يمكن ترجمة هذه المتوالية في الحساب المنطقي العادي كما يلي:

(أ ∧ (أ⟸ب)) ⟸ ب حيث تُترجم الفواصل (،) على يمين الرمز← برابط الوصل بينما تترجم الفواصل التي توجد على يساره بالفصل، أما الرمز فيترجم إلى الاستلزام ، بصفة عامة فالمتوالية (- **9**) تتُرجم إلى الصيغة (- **10**)

- 9- $أ_1$ ، $أ_2$ ....$أ_ن$ ← $ب_1$ ، $ب_2$ ...$ب_ن$

- 10- $أ_1$ ∧ $أ_2$ ∧....∧$أ_ن$ ⟸ $ب_1$ ∨ $ب_2$ ∨ ...∨$ب_ن$

---

[4] – Gerhard Gentzen[1969],

[5]–يجدر بنا التذكير أن حساب المتواليات هو عبارة عن نسق برهاني يقوم على مجموعة من القواعد الاستدلالية والبنيوية ومسلمة وحيدة خلافا للأنساق الاخرى –أنساق هلبرت وفريجيه وهايتين– على مجموعة من المسلمات وقاعدة وحيدة هي قاعدة اثبات التالي

ميز 'جينتزن' بين نوعين من القواعد ؛ قواعد بنيوية تضبط بنية المتوالية ثم قواعد استدلالية تضبط استعمال كل رابط منطقي على حدة وتسمح لنا بالانتقال من متوالية إلى أخرى. حصر 'جينتزن' القواعد البنيوية في أربع قواعد؛ قاعدة الإدغام ، القلب ، القطع وقاعدة التوسيع

قاعدة الإدغام

$$\frac{\Delta \leftarrow \Gamma \text{ ،أ،أ}}{\Delta \leftarrow \Gamma \text{ ،أ}} \qquad\qquad \frac{\text{أ،أ،}\ \Delta \leftarrow \Gamma}{\text{أ،}\ \Delta \leftarrow \Gamma}$$

إدغام الصيغ المكررة في السوابق — إدغام الصيغ المكررة في اللواحق

قاعدة القلب

$$\frac{\Delta \leftarrow \Gamma \text{ ،ج، ب ، أ}}{\Delta \leftarrow \Gamma \text{ ،ب ، ج ، أ}} \qquad\qquad \frac{\text{ج، ب ، أ ،}\ \Delta \leftarrow \Gamma}{\text{ب ، ج ، أ،}\ \Delta \leftarrow \Gamma}$$

تغيير ترتيب الصيغ في السوابق — تغيير ترتيب الصيغ في اللواحق

قاعدة القطع

$$\frac{\Delta \leftarrow \Gamma \text{ ، أ} \qquad \text{أ ،}\ \Delta \leftarrow \Gamma}{\Delta \leftarrow \Gamma}$$

حذف الصيغ المشتركة بين لاحق المتوالية الأولى وسابق المتولية الثانية

قاعدة التوسيع

$$\frac{\Delta \leftarrow \Gamma}{\Delta \leftarrow \Gamma \text{ ، أ}}$$

أما القواعد الاستدلالية فقد وضع 'جينتزن' لكل رابط قاعدة تضبط استعماله وما يهمنا في هذه الدراسة هو الاستلزام فيتم تعريف الاستلزام بطريقتين مختلفتين ؛ في الطريقة الأولى يدخل الاستلزام بنقل صيغة من مجموعة السوابق مستلزمة صيغة أخرى في مجموعة اللواحق.

$$\frac{\text{ب} ، \Delta \leftarrow \Gamma ، \text{أ}}{\text{ب} \Leftarrow \text{أ} ، \Delta \leftarrow \Gamma} \Leftarrow\text{-IS}$$

في المثال السابق سندخل الاستلزام على الشكل الآتي:

$$\frac{\text{ب} \leftarrow \text{ب} \quad \text{ب} \Leftarrow \text{أ} ، \text{أ}}{\text{ب} \Leftarrow \text{أ} \leftarrow \text{ب} \Leftarrow \text{أ}} \Leftarrow\text{-IS}$$

أما في الطريقة الثانية فنحتاج إلى متواليتين فتدمجان في متوالية وحيدة على الشكل الآتي:

$$\frac{\theta \leftarrow \Psi ، \text{ب} \qquad \text{أ} ، \Delta \leftarrow \Gamma}{\theta ، \Delta \leftarrow \Gamma ، \Psi ، \text{ب} \Leftarrow \text{أ}} \Leftarrow\text{-IA}$$

تمثل لذلك بالمثال الآتي مفترضين متواليتين أ←أ وَ ب←ب

$$\frac{\text{ب} \leftarrow \text{ب} \qquad \text{أ} \leftarrow \text{أ}}{\text{ب} \leftarrow \text{أ} ، \text{ب} \Leftarrow \text{أ}}$$

انظر كيف يميز 'جينتزن' بين مفهومي الاستلزام والمتوالية لكن للأسف في كتاب طه عبد الرحمان 'اللسان والميزان' قد تم الخلط بينهما حيث يعرف خاصية الإدغام السابقة كما يلي : 'مقتضاها أن كل قول مكرر في مقدم <u>الاستلزام</u> يمكن حذفه'[6] ، ونحن نعيد تعريف هذه الخاصية للتوافق مع نسق 'جينتزن' على الشكل الآتي: 'مقتضاها أن كل صيغة مكررة في <u>مقدم أو لاحق المتوالية</u> يجوز حذفها دون ان يفضي ذلك إلى تغيير في معنى المتوالية'

في هذا التعريف لم نقصر قاعدة الحذف على مقدم المتوالية وإنما أوقعناه كذلك على لاحق المتوالية انسجاما مع حساب المتواليات.

6 –طه عبد الرحمان ، اللسان و الميزان أو التكوثر العقلي ، المركز الثقافي العربي ،الدار البيضاء ،1998،الطبعة الأولى

2.الاستلزام الصناعي والطبيعي

يميز طه عبد الرحمان -كدأب البلاغيين والحجاجيين- بين استلزامات طبيعية وأخرى صناعية[7] وقد بين خصائص كل نوع ، وضمن الاستدلالات الطبيعية ذكر استلزامات البنية الدلالية للقول وقد عرف نوعا منها وهو الاستدلال الدلالي على الشكل الآتي:

- 11-يستلزم القول ب استلزاما دلاليا القول جـ متى صدق مدلول جـ في كل حالة يصدق فيها مدلول ب.

وقد مثل طه عبد الرحمان لهذا النوع من الاستلزام بما يلي:

- 12- أضحك زيد عمروا

- 13-ضحك عمرو

فلا يمكن أن يصدق القول (- **12**) من غير أن يصدق القول (- **13**) ومن ثم نستنتج أن:

- 14- أضحك زيد عمروا يستلزم ضحك عمرو

سأبين فيما يلي أن هذا التعريف للاستلزام لا يخرج عن مواصفات الاستلزام الصناعي لنعتبر الحجة الآتية :

ب ⊩ ج حيث تمثل ب مقدمة الحجة و ج نتيجة الحجة.

تعتبر هذه الحجة صحيحة إذا صدقت ج في كل حالة يصدق فيها ب ، ويمكن التحقق من صحتها باستعمال جداول الصدق، وبتطبيق مبرهنة الاستنتاج التي تحدثنا عنها سابقا نحصل على :

⊩ ب ⇐ج

ومن ثم نحصل على صيغة تحصيلية حيث إن ب تستلزم ج ، بذلك يرتفع الفرق بين الاستلزام الصناعي والطبيعي حيث إن الصيغة التحصيلية هي ما يعنيه 'زابر' بالاستلزام الطبيعي.

فرق الأستاذ طه الاستلزام الدلالي والاستلزام الصناعي من جهتين :

أولاهما جواز عكس الثبوت مثلا إذا افترضنا أن أ تستلزم ب فإن ب تستلزم أ وبموجب هذا المبدأ نستنتج أن:

---

[7]–يعتمد الأستاذ طه على زابر في هذا التقابل انظر :

Richard Zuber , Implications sémantiques dans les langues naturelles.

- 15- ضحك زيد يستلزم أضحك زيد عمرا

لا أدري كيف يستقيم معنى هذا القول في ميزان اللسان الطبيعي وما مسوغ الانتقال من ضحك زيد إلى أن شخصا ما أضحكه ! ! ! فالاستلزام غير صحيح ولا يستسيغه متحدث باللغة العربية .

أما الجهة الثانية فهي أنه لا يشترط في الاستلزام الطبيعي 'عكس الانتفاء' خلافا للاستلزام الصناعي ، وصورة عكس الانتفاء المنطقية على الشكل الآتي:

(أ⇐ب) ↔ (⌐ب←⌐أ)

وبموجب ذلك نستنتج القول :

- 16-لم يضحك عمرو يستلزم زيد لم يُضحك عمروا.

من خلال هذا المثال يبدوا أن قانون عكس الانتفاء لا يجري على القول الطبيعي لكن عند إمعان النظر في الطريقة التي تُرجم إليها القول (**- 14**) يتبين أن هذه الترجمة شابتها مجموعة من الهفوات فكان حري أن تُترجم إلى الصيغة :

- 17- (أضحك زيد عمروا ∧ ضحك عمرو )⟸ ضحك عمرو

بعد ذلك يُسمح لنا بتطبيق عكس الانتفاء :

- 18-لم يضحك عمرو يستلزم أن زيدا لم يضحك عمروا أو لم يضحك عمرو

أما الصورة الرمزية لهذا الاستدلال فهي على الشكل الآتي:

(أ ∧ ب)⇐ج

بعد تطبيق عكس الانتفاء نحصل على:

⌐ج⟸⌐(أ ∧ ب)

⌐ج⟸ (⌐أ ∨ ⌐ب)

المراجع:

طه عبد الرحمان ، اللسان و الميزان أو التكوثر العقلي ، المركز الثقافي العربي ،الدار البيضاء ،الطبعة الأولى،1998

Gerhard Gentzen[1969], THE COLLECTED PAPERS OF GERHARD GENTZEN. Edited by. M. E. SZABO. Sir George Williams University. Montreal.

Paul Lorenzen [1965]., Formal logic , Translated from the German by Frederick J. Crosson , Dordrecht, : D. Reidel Pub. Co., [1965].

Jean-Blaise Grize [1972], Logique moderne - Fascicule 3 , Implications, Modalités, Logiques polyvalentes, Logique combinatoire, Ontologie et méréologie de Lésniewski , Mouton / Gauthier-Villars.

Jean-Blaise Grize [1972] , Logique moderne. Fascicule II, Logique des propositions et des prédicats, tables de vérité et axiomatisation , Mouton / Gauthier-Villars.

Jean-Blaise Grize [1972] , Logique moderne - Fascicule I : Logique des propositions et des prédicats, déduction naturelle, Mouton / Gauthier-Villars.

**Dalen**, Dirk van , Logic and Structure [2004] , Springer-Verlag Berlin and Heidelberg,.

Alfred Tarski [1995], Introduction to Logic: and to the Methodology of Deductive Sciences , Dover Publications

A.S. Troelstra, D. van Dalen [1988] Constructivism in Mathematics, Volume 1. Elsevier.

A. Heyting [1956] , Intuitionism an Introduction , North-Holland PUBLISHING COMPANY AMSTERDAM.